DYNAMIQUE

I- DÉFINITION :

La dynamique est le chapitre de la mécanique qui étudie les mouvements des solides en relation avec les forces qui les produisent. L'étude et la compréhension de ce chapitre suppose l'acquisition des connaissances abordées en statique et en cinématique (1^{er} STM).

Sur un plan historique, les découvertes des principes de la dynamique sont plus récentes que celles relatives à la statique. Galilée (1564-1642), le premier, effectua une approche scientifique des phénomènes. Ses travaux, déterminants, sont à l'origine des résultats de Huygens et Newton. Newton fut le premier à formuler correctement le principe fondamental de la dynamique et la loi de la gravitation universelle. Par la suite, Euler, d'Alembert, Lagrange, Laplace, Poinsot, Coriolis, Einstein et d'autres apportèrent une contribution importante **au développement de cette science essentielle.**

En ce qui concerne la technologie et ses applications, la dynamique est plus récente et se développe avec l'ère industrielle et la construction des machines travaillant aux vitesses élevées avec ou sans chocs.

Remarque :

Il y a trois méthodes possibles pour traiter un même problème de dynamique, chacune ayant ses avantages et ses inconvénients :

1- par application directe de la loi de Newton ou du principe fondamental ;
2- par utilisation des théorèmes relatifs au travail et à l'énergie (voir le chapitre ''énergétique'') ;
3- à partir des théorèmes portant sur les quantités de mouvement et le moment cinétique.

II- RAPPELS :

Il est indispensable de maitriser la ***cinématique*** et la ***statique*** afin d'acquérir ce nouvel outil de la mécanique.

2.1- Action mécanique (Statique):

- Torseur statique exprimant le **PFS**

$$\{\tau_{\bar{s}/s}\}_A = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i ext} = \vec{0} \\ \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathfrak{M}_{/A} F_i ext} = \vec{0} \end{array} \right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

- Torseur statique exprimé au même point

$$\{\tau_{\bar{s}/s}\}_A = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\bar{s}/s}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i ext} \\ \overrightarrow{M_{/A(\bar{s}/s)}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathfrak{M}_{/G} F_i ext} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AG_i} \wedge \overrightarrow{F_i ext} \end{array} \right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

2.2- Cinématique :

Équations du mouvement de **translation** :

- **rectiligne uniforme**

Accélération : $a = \gamma = \Gamma = 0 \; (m/s^2)$

Vitesse : $V = constante \; (m/s)$

Déplacement : $x = V \cdot t + x_i \; (m)$

- **rectiligne uniformément varié**

Accélération : $a = \gamma = \Gamma = constante \; (m/s^2)$

Vitesse : $V = a \cdot t + V_i \; (m/s)$

Déplacement : $x = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + V_i \cdot t + x_i \; (m)$

Formule utile : $V^2 = V_i^2 + 2a(x - x_i)$

Équations du mouvement de **rotation** autour d'un axe fixe :

- **uniforme**

Accélération : $\theta'' = \ddot{\theta} = 0 \; (rad/s^2)$

Vitesse : $\theta' = \dot{\theta} = \omega = constante \; (rad/s)$

Déplacement : $\theta = \omega \cdot t + \theta_i \; (rad)$

- **uniformément varié**

Accélération : $\theta'' = \ddot{\theta} = \omega' = constante \; (rad/s^2)$

Vitesse : $\theta' = \dot{\theta} = \omega = \theta'' \cdot t + \theta'_i \; (rad/s)$

Déplacement : $\theta = \frac{1}{2} \theta'' \cdot t^2 + \theta'_i \cdot t + \theta_i \; (rad)$

Formule utile : $\omega^2 = \omega_i^2 + 2\omega' \cdot (\theta - \theta_i)$

Remarque : Relation vectorielle entre les vitesses d'un solide en mouvement plan (Translation + Rotation):

$$\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\omega}$$

2.3- Relation vectorielle entre les accélérations (tangentielle et normale) d'un solide :

Quelle que soit la nature des mouvements, on a :

$$\overrightarrow{a_{A/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n} \ ;$$

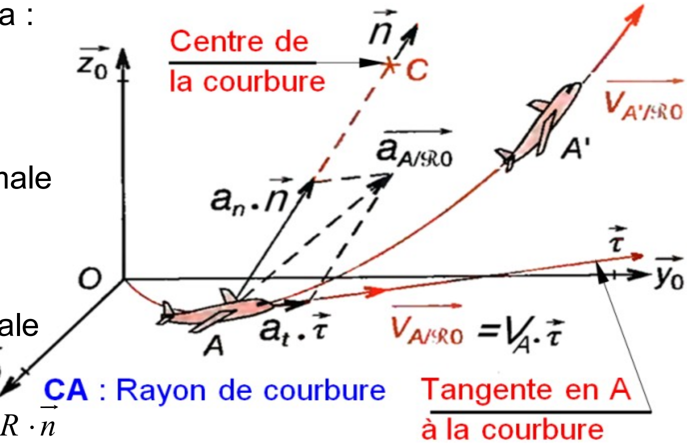
avec et en cas de :

- **Translation :**

Accélération tangentielle	Accélération normale
$\overrightarrow{a_t} = a_t \cdot \vec{\tau} = \dfrac{dV_A}{dt} \cdot \vec{\tau}$	$\overrightarrow{a_n} = a_n \cdot \vec{n} = \dfrac{V_A^2}{R} \cdot \vec{n}$

- **Rotation :**

Accélération tangentielle	Accélération normale
$\overrightarrow{a_t} = a_t \cdot \vec{\tau}$	$\overrightarrow{a_n} = a_n \cdot \vec{n}$
$\overrightarrow{a_t} = \dfrac{d\omega_A}{dt} \cdot R \cdot \vec{\tau} = \omega'_A \cdot R \cdot \vec{\tau}$	$\overrightarrow{a_n} = \theta'^2 \cdot R \cdot \vec{n} = \omega^2 \cdot R \cdot \vec{n}$



III- PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE :

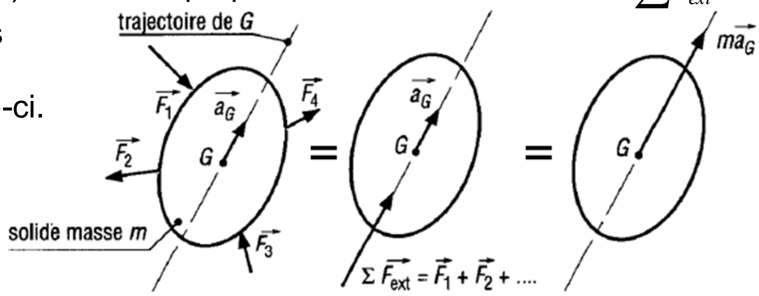
3.1- Cas d'un solide en translation rectiligne :

a- Énoncé :

L'énoncé proposé s'applique indifféremment à un point matériel de masse "*m*" ou à un solide en translation rectiligne de masse "*m*" et de centre de gravité G.

1^{er} loi : La première loi correspond au principe fondamental de la statique (voir partie statique). Elle s'applique aussi bien à un solide en équilibre qu'à un solide évoluant à vitesse constante.

$2^{ème}$ loi : L'accélération "$\overrightarrow{a_G}$" du centre de gravité G d'un solide en translation rectiligne par rapport à un repère (ou solide) absolu est proportionnelle à la résultante "$\sum \overrightarrow{F_{ext}}$" des forces ou actions extérieures agissant sur le solide et a même direction et même sens que celle-ci.



Le **PFD** se traduit par les relations :

$$\begin{cases} \sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \cdot \overrightarrow{a_G} \\ \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_G F_{ext}} = \vec{0} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sum \overrightarrow{F_{ext}} : \text{résultante des forces extérieure en (N)} \\ m : \text{Masse du solide en (kg)} \\ \overrightarrow{a_G} : \text{Accélération du solide en } (m/s^2) \end{cases}$$

Remarque :

- Le PFD n'est applicable que dans un repère Galiléen (ex : le mouvement d'une tête d'usinage sera étudié sur un repère Galiléen, lié au bâti de la machine).
- La résultante $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$ doit passer par G sinon il y a mouvement plan.
- $-m \cdot \overrightarrow{a_G}$: est appelée force d'inertie, cette force est opposée à l'accélération $\overrightarrow{a_G}$.
  (Principe de d'Alembert)

$3^{ème}$ loi : En statique et en dynamique, les actions mutuelles entre deux solides sont égales et opposées.

b- Repère absolu ou galiléen :

Pour que l'application du principe fondamental soit correcte, l'accélération "$\overrightarrow{a_G}$" doit être une accélération absolue. Par commodité, l'accélération "$\overrightarrow{a_G}$" est généralement repérée ou déterminée par rapport à un repère lié à la terre prise comme référence absolue.

Cependant, la terre n'est pas un référentiel absolu ou galiléen rigoureux mais approché.

Pour la plupart des problèmes de mécanique usuels, cette approximation suffit et amène des erreurs négligeables. Pour un certain nombre de problèmes faisant intervenir des avions, fusées, missiles et autres, il est parfois nécessaire de faire intervenir les accélérations engendrées par le mouvement de la terre.

Exemple : pour un corps en chute libre, la rotation de la terre engendre une légère accélération dirigée vers l'est (accélération de Coriolis) créant une perturbation du mouvement de chute libre.

Le solide ne tombe pas exactement verticalement mais subit une légère déviation vers l'est égale à : $d = \frac{2\omega}{3}\cos\theta\sqrt{\frac{2h^3}{g}}$

avec :
- ω = 0,729.10^{-4} rad/s (vitesse rotation terre)
- g = 10 m/s^2
- h : hauteur de chute en m
- θ : latitude nord ou sud

c- Temps relatif et temps absolu :

Dans l'équation de Newton, le temps est considéré comme une grandeur absolue, s'écoulant inexorablement d'arrière en avant au rythme régulier indiqué par les pendules et les calendriers.

D'après Einstein, le temps n'est pas absolu mais relatif et dépend de la vitesse propre de l'observateur et de la position finale de celui-ci. Cependant, la notion de temps relatif n'est vraiment sensible que pour des particules se déplaçant à de très hautes vitesses (proches de celle de la lumière : 300 000 km/s).

Exemple : Une Sphère de 2,5 kg en chute libre, résistance de l'air négligé.
Calculer la force extérieure. (Avec g = 10 m/s^2)

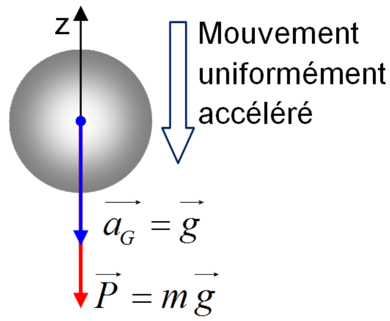
$\sum\overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P}$ = *vecteur poids*

$\overrightarrow{a_G} = \vec{g}$ = *accélération de la pesanteur*

PFD : $\sum\overrightarrow{F_{ext}} = m\cdot\overrightarrow{a_G}$ ce qui donne $\vec{P} = m\cdot\overrightarrow{a_G}$

En projection sur l'axe verticale $\vec{z}$ $P = m\cdot g$

donc : $P = 2,5\cdot 10 = 25\,N$

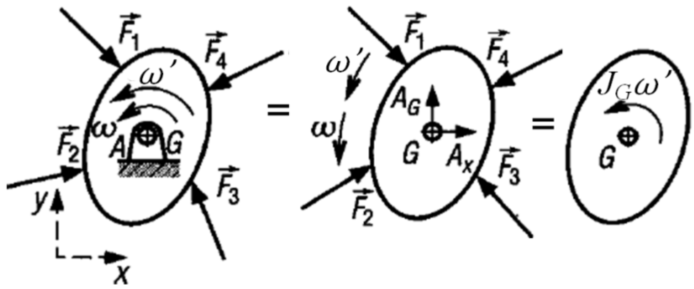


3.2- Cas d'un solide en rotation par rapport un axe fixe :

a- Cas où le centre de gravité est situé sur l'axe de rotation :

Le solide de masse "m" tourne à la vitesse angulaire ω autour de l'axe de rotation (A, $\vec{z}$), le centre de gravité G est sur cet axe et $\overrightarrow{a_G}$ est l'accélération angulaire du mouvement.

$\overrightarrow{A_x}$ et $\overrightarrow{A_y}$ sont les actions exercées par la liaison pivot sur le solide. J_G est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (G, $\vec{z}$) qui est aussi l'axe de rotation.



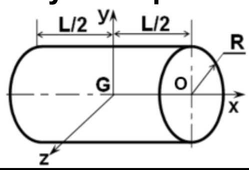
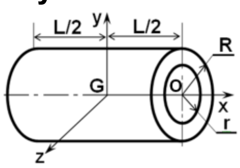
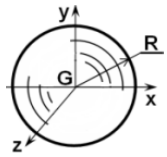
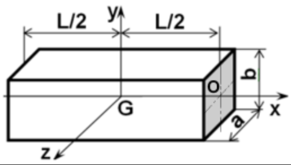
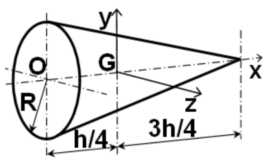
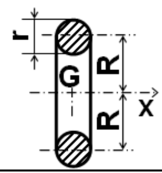
Le **PFD** se traduit par les relations :

$$\begin{cases} \sum\overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y} + \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + ... = \vec{0} \\ \sum\overrightarrow{\mathcal{M}_G F_{ext}} = \sum\overrightarrow{\mathcal{M}_A F_{ext}} = J_{Gz}\cdot\dot{\omega} = J_{Gz}\cdot\theta'' \end{cases}$$

- $\sum\overrightarrow{\mathcal{M}_G F_{ext}}$: Moment résultante par rapport à l'axe $\overrightarrow{G_z}$ des $\overrightarrow{F_{ext}}$ (N.m)
  $\sum\overrightarrow{\mathcal{M}_G F_{ext}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_G F_1} + \overrightarrow{\mathcal{M}_G F_2} + ...$
- J_{Gz} : Moment d'inertie du solide par rapport à l'axe $\overrightarrow{G_z}$ (kg.m^2)
- $\dot{\omega} = \theta''$: Accélération angulaire du solide autour de l'axe $\overrightarrow{G_z}$ (rad/s^2)

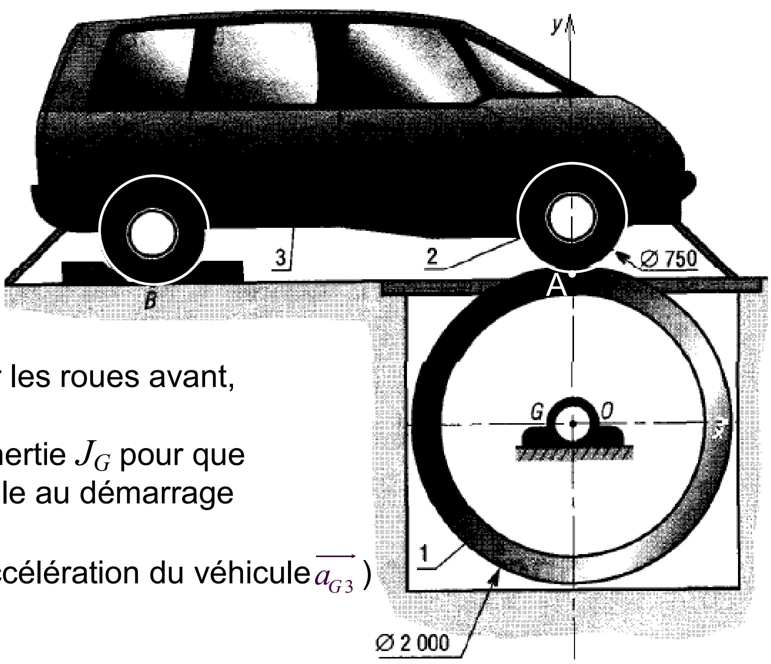
3.3- Quelques moments d'inertie usuelle :

Le moment d'inertie est un scalaire qui dépend de la géométrie, de la masse et de l'axe de rotation autour duquel se fait le mouvement.

	Cylindre plein	Cylindre creux	Sphère
			
Masse	$m=\pi R^2\cdot L\cdot\rho$	$m=\pi(R^2-r^2)\cdot L\cdot\rho$	$m=\frac{4}{3}\pi R^3\cdot\rho$
Moment d'inertie	$J_{Gx}=\frac{m\cdot R^2}{2}$ $J_{Gy}=\frac{m\cdot R^2}{4}+\frac{m\cdot L^2}{12}$ $J_{Gz}=\frac{m\cdot R^2}{4}+\frac{m\cdot L^2}{12}$	$J_{Gx}=\frac{m\cdot(R^2+r^2)}{2}$ $J_{Gy}=\frac{m\cdot(R^2+r^2)}{4}+\frac{m\cdot L^2}{12}$ $J_{Gz}=\frac{m\cdot(R^2+r^2)}{4}+\frac{m\cdot L^2}{12}$	$J_{Gx}=\frac{2}{5}m\cdot R^2$ $J_{Gy}=\frac{2}{5}m\cdot R^2$ $J_{Gz}=\frac{2}{5}m\cdot R^2$
	Parallélépipède	**Cône plein**	**Tore**
			
Masse	$m=a\cdot b\cdot L\cdot\rho$	$m=\frac{1}{3}\pi R^2 h\cdot\rho$	$m=2\pi^2 r^2 R\cdot\rho$
Moment d'inertie	$J_{Gx}=\frac{m}{12}\cdot(a^2+b^2)$ $J_{Gy}=\frac{m}{12}\cdot(a^2+L^2)$ $J_{Gz}=\frac{m}{12}\cdot(b^2+L^2)$	$J_{Gx}=\frac{3m}{10}r^2$ $J_{Gy}=\frac{3m}{20}\cdot r^2+\frac{3m}{5}\cdot h^2$ $J_{Gz}=\frac{3m}{20}\cdot r^2+\frac{3m}{5}\cdot h^2$	$J_{Gx}=\frac{m}{4}\cdot(4R^2+3r^2)$

Exemple :

Dans un laboratoire d'essai, pour tester les accélérations d'un véhicule, on utilise un dispositif avec tambour. Les roues motrices sont posées en A sur la partie haute du tambour (rayon ***R*** **=** 1 m, longueur 2,5 m, moment d'inertie J_G variable ou ajustable) libre de tourner autour de son axe de rotation $(G,\vec{z})$.



La masse totale du véhicule en charge est de 2 000 kg. La charge supportée par les roues avant, au repos, est de 1 200 daN.

Quelle doit être la valeur du moment d'inertie J_G pour que le tambour se comporte comme le véhicule au démarrage ou au freinage ?

(accélération tangentielle tambour $\vec{a}_t$ = accélération du véhicule $\overrightarrow{a_{G3}}$)

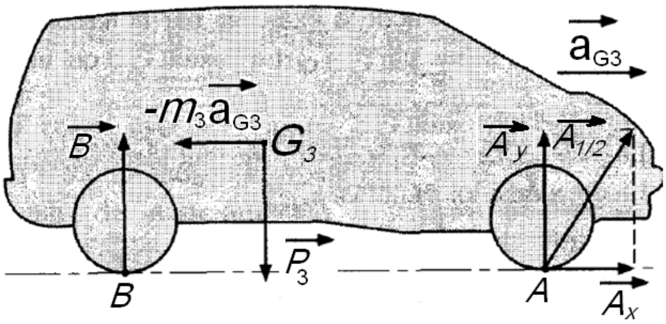
Rep :

a- Isolons le véhicule :

Supposons que l'automobile démarre sur une route horizontale avec une accélération $\overrightarrow{a_{G3}}$.

$\overrightarrow{P_3}$ est le poids du véhicule, $\overrightarrow{A_{1/2}}$ et $\overrightarrow{B}$ les actions sur les roues.

$(-m\overrightarrow{a_{G3}})$ est la force d'inertie au démarrage.



PFD : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{P_3} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A_{1/2}} = m_3 \cdot \overrightarrow{a_{G3}}$

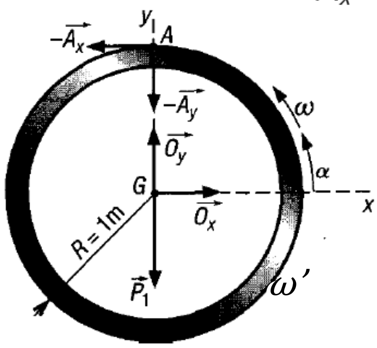
Proj/x : $\left\|\overrightarrow{A_x}\right\| = m_3 \cdot a_{G3}$

b- Isolons le tambour :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{O_x} + \overrightarrow{O_y} + \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y} = \vec{0}$$

$$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_G \overrightarrow{F_{ext}}} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_G \overrightarrow{P_1}} + \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_G \overrightarrow{O_x}} + \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_G \overrightarrow{O_y}} + \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_G \overrightarrow{A_x}} + \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_G \overrightarrow{A_y}}$$

$$= \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_G \overrightarrow{A_x}} = J_G \overrightarrow{\omega'}$$

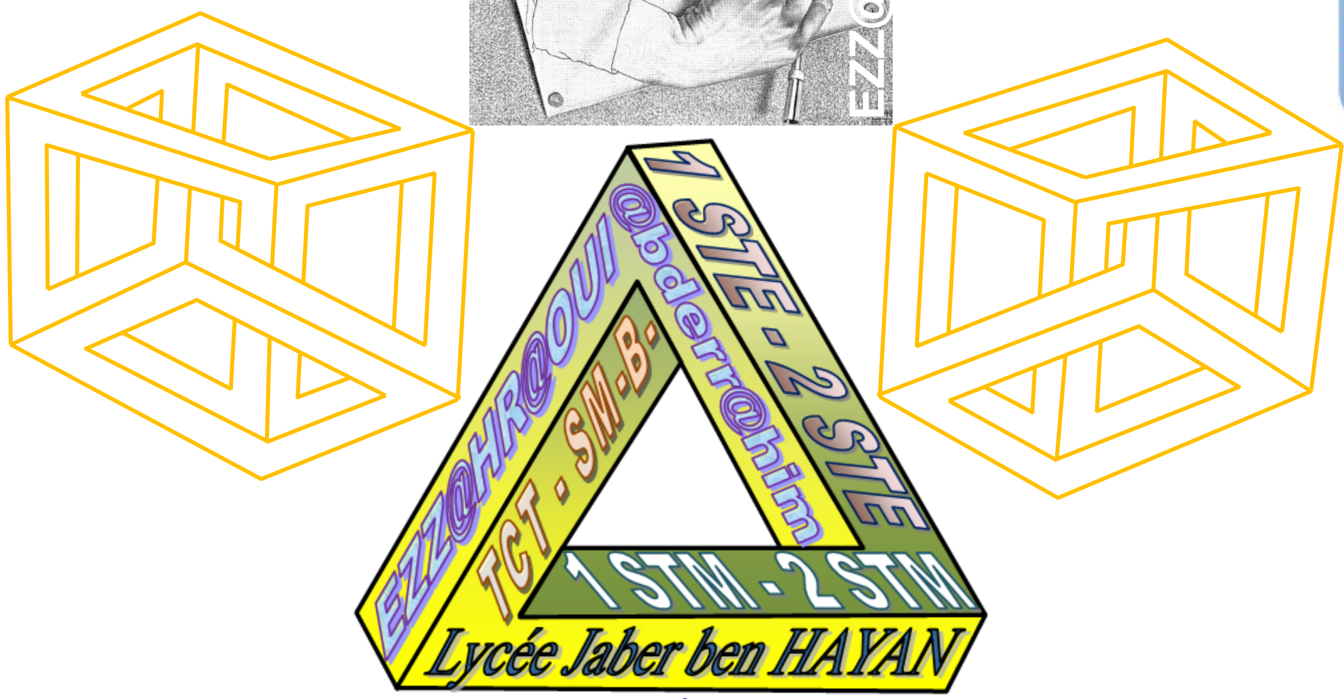


Proj/z : $\sum \mathcal{M}_G \overrightarrow{A_x} = \left\|\overrightarrow{A_x}\right\| \cdot R = J_G \cdot \ddot{\theta}$

or $\omega' = \ddot{\theta} = \dfrac{a_t}{R} = \dfrac{a_{G3}}{R} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{A_x}\right\|}{m_3 \cdot R}$ donc : $\boxed{J_G = m_3 \cdot R^2}$

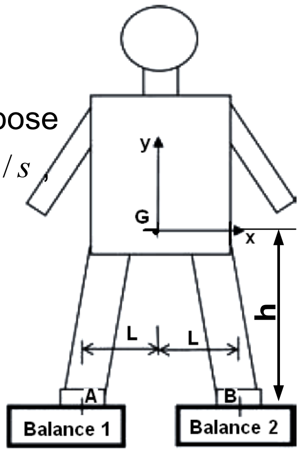
Remarque :

Si, au cours de l'étude, un élève repère ce qui lui semble être une erreur ou fautes de frappe, il le signale au professeur de la matière !!!



Exercice type 1 :

➤ Mouvement de translation rectiligne uniformément varié



Un homme de 80 kg se trouve debout dans une plate-forme en phase de démarrage (accélération $_{Homme/sol}$ = 3 m/s^2). Chaque pied de cet homme repose sur une balance. La plate-forme accélère jusqu'à la vitesse $\left\|\overrightarrow{V_{Homme/sol}}\right\| = 6\,m/s$, puis continue en vitesse uniforme (régime établi), puis décélère.

On prendra g = 10 m/s^2 pour l'accélération de la pesanteur.

A. On se place lors de la phase d'accélération.

On cherche à connaître les valeurs indiquées par les balances 1 et 2 avec les hypothèses suivantes :

- les solides sont indéformables et géométriquement parfaits ;
- les liaisons dans l'ascenseur sont sans jeux ni frottements.

1- Isolez l'homme et faites le bilan des actions mécaniques.

2- Appliquez le principe fondamental de la dynamique (appliquer les théorèmes de la résultante et du moment dynamique en écrivant les moments au point G).

3- Déterminez la valeur des actions $\left\|\overrightarrow{A_{Balance\,1/Homme}}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{B_{Balance\,2/Homme}}\right\|$, c'est-à-dire combien les balances 1 et 2 indiquent-elles ?

B. On se place lors de la phase d'accélération.

4- Déterminez l'énergie que la plate-forme donne à l'homme pour pouvoir le monter pendant 5 secondes en régime établi.

5- Déterminez le travail que la plate-forme donne à l'homme pour pouvoir le monter sur sur ℓ = 30 m en régime établi.

6- Qu'en concluez-vous par rapport aux questions 4 et 5 ?

7- Déterminez l'énergie cinétique emmagasinée par l'homme seul lorsque la plate-forme est en régime établi.

Exercice type 2 :

➤ Mouvement de rotation uniformément varié

Un touret à meuler sert notamment pour l'affûtage des outils à l'atelier. La meule est entraînée par un motoréducteur fournissant le couple nécessaire pour le fonctionnement. Une liaison pivot entre motoréducteur et meule guide l'axe de la meule (figure ci-dessus).

Le système étudié est un touret à meuler en phase de rotation uniformément accélérée (accélération notée $\theta''_{meule/bâti}$ = 13 rad/s^2) puis en régime établi à $\omega_{meule/bâti}$ = 56 rad/s.

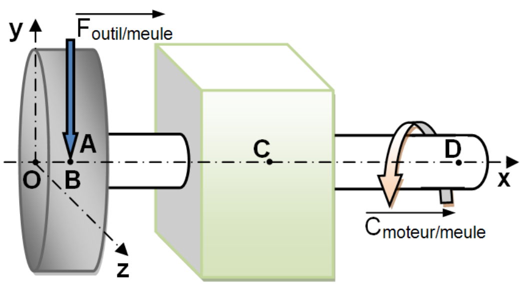
On cherche à déterminer le couple du moteur sur la meule et les actions dans la liaison pivot.

Les données sont : masse volumique ρ = 7800 kg/m^3 ; rayon AB = R = 400 mm ;

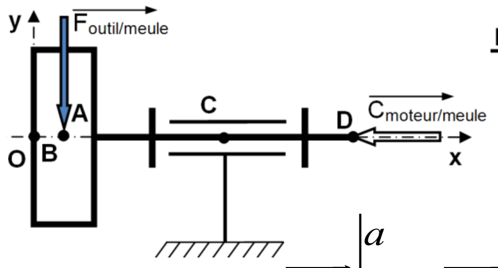
épaisseur e = 150 mm ; action de l'outil sur la meule $\left\|\overrightarrow{F_{outil/meule}}\right\| = -50\,N$, suivant l'axe *(y)* ;

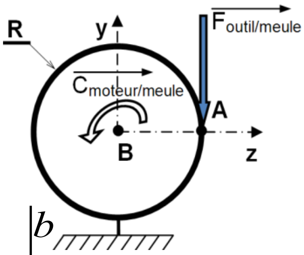
a = 50 mm ; b = 100 mm

On fait les hypothèses suivantes :
- les solides sont indéformables et géométriquement parfaits ;
- les liaisons sont sans jeu ni frottement.



Meule de rayon R, de large e, de masse m, de moment d'inertie J et de centre de gravité B.





$$\overrightarrow{BC}\begin{vmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{BD}\begin{vmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

A. On se place dans la phase d'accélération.

1- Écrivez le vecteur moment résultant de l'action $\overrightarrow{F_{outil/meule}}$ sur le bras de levier *R* de manière graphique (échelle 1 cm = 10 Nm). On le nommera $\overrightarrow{\mathcal{M}\,\overrightarrow{F_{(outil/meule)}}_{/B}}$.

2- Isolez la meule et faites le bilan des actions mécaniques pour déterminer le moment dynamique.

3- Appliquez le théorème du moment dynamique en projection sur l'axe *(x)* à la meule isolée.

4- Résolvez l'équation en déterminant la valeur de $\overrightarrow{C_{moteur/meule}}$.

5- Donnez la valeur des caractéristiques que devra posséder l'arbre du motoréducteur.

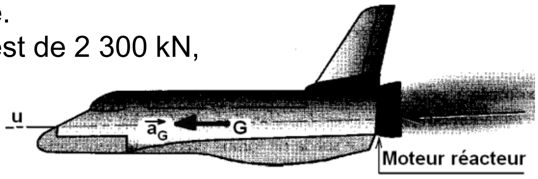
B. On se place en régime établi, lorsque la meule tourne à vitesse constante.

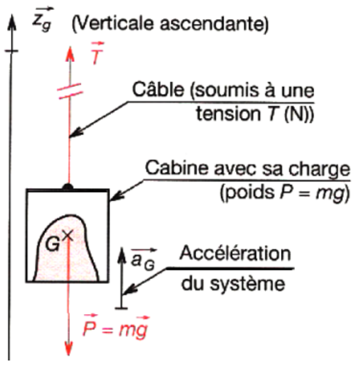
6- Déterminez l'énergie que le moteur absorbe pendant 5 secondes en régime établi.

7- Déterminez le travail que l'homme fournit pour affûter son outil sur 100 tours de meule.

8- Déterminez l'énergie cinétique emmagasinée par la meule isolée lorsqu'elle tourne à vitesse constante.

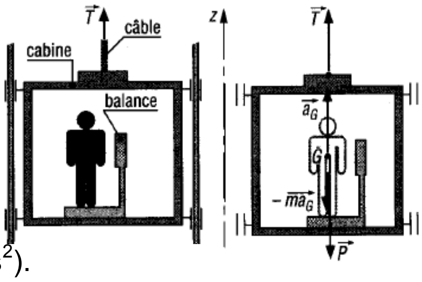
EX 3- Une navette spatiale est supposée à l'arrêt dans l'espace.
Les trois moteurs sont allumés, la poussée de chaque moteur est de 2 300 kN, les trois poussées sont parallèles et leur action résultante $\sum \overrightarrow{F_{ext}}$ passe par G.
Déterminons l'accélération supportée par les astronautes si la masse de la navette est de 100 tonnes.



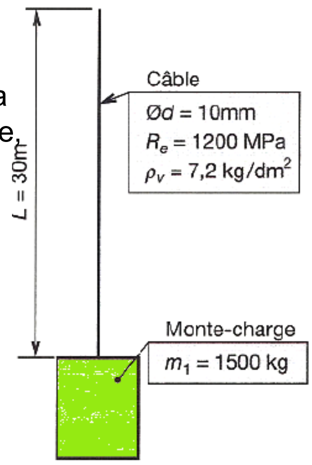


EX 4-
Exprimer *T* en fonction de *m.g* et a_G
avec: m = 500 kg, *g* = 10 m/s^2,
$a_G = 0$ puis $a_G = 2$ m/s^2

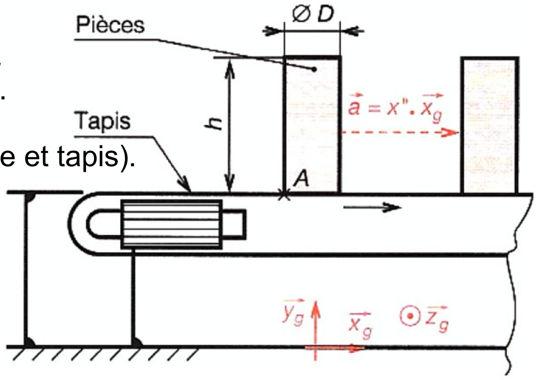
EX 5- CABINE D'ASCENSEUR :
Un homme de 80 kg se tient debout sur une balance dans une cabine d'ascenseur à l'arrêt. Le moteur est mis en marche et la tension $\vec{T}$ du câble de levage atteint la valeur de 900 daN pendant les trois premières secondes. Si l'accélération est supposée constante, **quelle** lecture peut-on lire sur la balance ? Les frottements sont négligés, la masse de l'ensemble (cabine + balance) est de 720 kg. (g = 9,81 m/s^2).



EX6-
Un monte-charge de masse m_1 = 1500 kg avec son chargement est soulevé par un câble de diamètre *d* = 10 mm. Ce câble a une limite élastique *Re* = 1200 MPa et une masse volumique ρ_V = 7,2 kg/dm^3. Pour la position basse du monte-charge, le câble a une longueur déroulée de *L* = 30 m (masse non négligeable).
Déterminer :
1- Le coefficient de sécurité du câble lorsqu'il soutient le monte-charge à l'arrêt.
2- À partir de quelle accélération du monte-charge, le câble risque-t-il de se rompre ?



EX7- ÉQUILIBRE SUR UN TAPIS MOBILE



Un transporteur déplace des pièces cylindriques de diamètre *D,* hauteur *h,* masse *M,* reposant par leur base sur le tapis mobile.

Exprimer l'accélération maximale pour que :

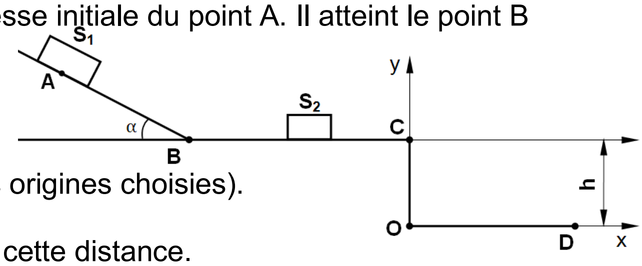
1- Aucun cylindre ne glisse (facteur de frottement *f* entre cylindre et tapis).

2- Aucun cylindre ne bascule.

Application numérique : *M*= 1,2kg, *D*= 75mm, *h* = 210mm, *f* = 0,5.

EX 8-

A/ Un corps S1 de masse m = 1 kg, glisse sans frottement sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$, par rapport à l'horizontale. On l'abandonne sans vitesse initiale du point A. Il atteint le point B avec une vitesse V = 3 m/s.



1- En utilisant le principe fondamental de la dynamique, **établir** l'expression de l'accélération ''a'' de S_1 sur le plan incliné. (On donne g = 10 m/s^2).

2- Donner l'équation du mouvement de S_1 (préciser les origines choisies).

3- Calculer la distance AB.

4- Quel est le temps mis par le corps S_1 pour parcourir cette distance.

B/ Le corps S_1 aborde un plan horizontal avec la vitesse V = 3 m/s. Il heurte alors un autre corps S_2 immobile de même masse que S_1, ce qui donne les vitesses $V'_1 = 0$ du corps S_1 et $V'_2 = 3$ m/s de S_2 après le choc (le choc est supposé parfaitement élastique).

Le deuxième corps S_2 est ensuite freiné pour arriver au point C avec une vitesse $V_C = 2,24$ m/s. Avec cette vitesse il tombe alors sur un deuxième niveau en chute libre.

1- Trouver les équations suivant Ox et Oy du mouvement du corps S_2.

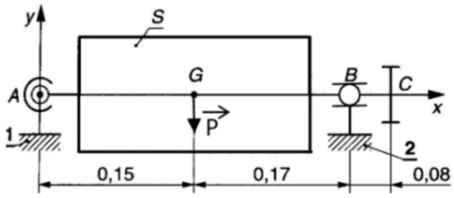
2- La hauteur entre les 2 niveaux horizontaux est h = 20 m. **Calculer** le temps de la chute.

3- Calculer la distance OD, D étant le point de chute du corps S_2 sur le deuxième niveau.

EX 9-

On considère l'arbre d'un réducteur ci contre. Il est monté en liaison pivot par deux roulements type BC en A et en B. Données : P = 200N ; $J_x = 8.10^{-3}$ kg.m^2

Action en C de l'engrènement : $\{\tau_{3/S}\}_C = {}_C\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 100 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$



But de l'étude :

On se propose d'étudier le mouvement de rotation de l'ensemble S.

On cherchera à déterminer les actions mécaniques des liaisons et la durée de la phase de démarrage.

a- Écrire les différents torseurs des actions mécaniques extérieures à S. (Bilan des $\overrightarrow{F_{ext/S}}$)

b- Écrire ces torseurs en A

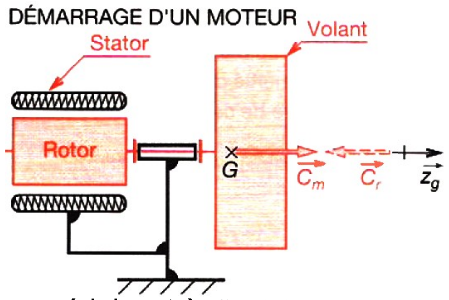
c- Appliquer le principe fondamental de la dynamique et déterminer les composantes de ces torseurs

d- Déterminer l'accélération angulaire θ'' du mouvement de S et en déduire la nature de ce mouvement

e- On considère que à t = 0 alors $\theta' = 0$.

Déterminer le temps nécessaire pour atteindre la vitesse de N = 1500 tr/mn

EX 10-



Un moteur exerce au démarrage un couple $Cm = 5$ N. m.

L'ensemble de la chaîne cinématique peut être modélisé par un volant plein de rayon *R* = 150 mm et de masse *m* = 50 kg, relié directement au moteur.

Calculer la durée de démarrage pour que le moteur atteigne la fréquence de rotation *N* = 1500 tr/min :

1- En négligeant les frottements,

2- En considérant que tous les frottements rapportés à l'axe du moteur se réduisent à $C_r = 0,2$ N.m.

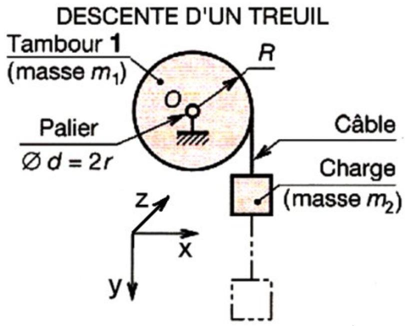
EX 11-

Sur un tambour plein1 de masse m_1 = 60 kg, de rayon R = 200 mm, s'enroule un câble supposé sans raideur et de masse négligeable.

Le tambour pivote avec frottement (f = 0,2) dans des paliers Ød =20mm.

À l'extrémité du câble, on accroche une charge de masse m_2 =30 kg qu'on abandonne sans vitesse initiale.

Calculer la durée mise par la charge pour descendre h =10m.



EX12-

Cas de deux arbres tournants.

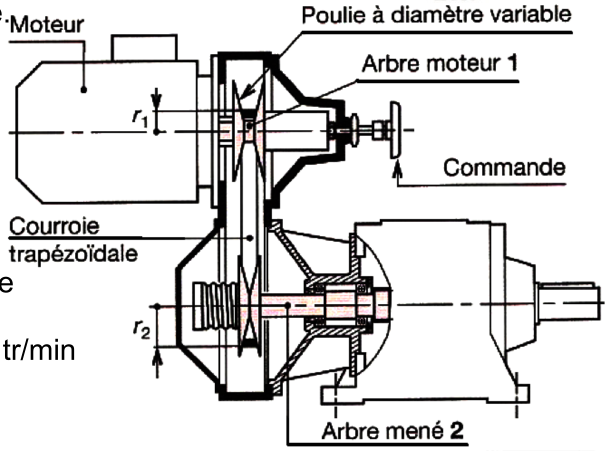
L'arbre1 a une inertie J_1 = 0,2 kg.m^2 par rapport à son axe. Il entraîne, par l'intermédiaire d'une courroie, un arbre 2 dont l'inertie par rapport à son axe est J_2 = 3 kg.m^2.

L'arbre1 est soumis à un couple de démarrage C_{m1} = 12 N.m ; alors que l'arbre 2 supporte un couple résistant global égal à C_{r2} = 20 N.m. Pour un certain réglage des poulies, le rapport de réduction obtenu est $R = r_1 / r_2$, (r_1 =15 mm ; r_2 = 60 mm).

1- Exprimer l'accélération angulaire pendant le démarrage (application numérique).

2- Calculer la durée mise pour que l'arbre1 tourne à1500 tr/min (C_{m1} constant).

3- On supprime C_{m1}. **Calculer** la durée de l'arrêt ?

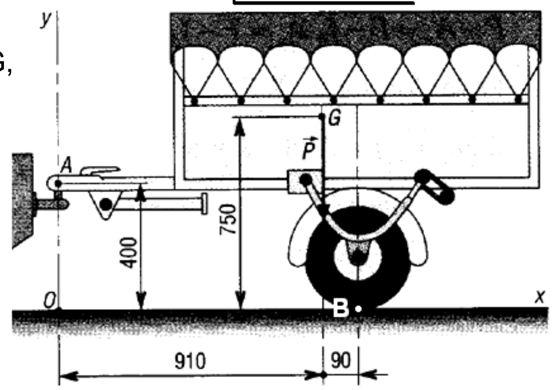


EX13-

Une remorque bagagère de poids P = 300 daN appliqué en G, centre de gravité, est tractée en A (liaison rotule) par une automobile. L'ensemble voiture plus remorque atteint la vitesse de 72 km/h en 100 m, départ arrêté. (g = 10 m/s^2)

a- Déterminer l'accélération du mouvement si celle-ci est constante.

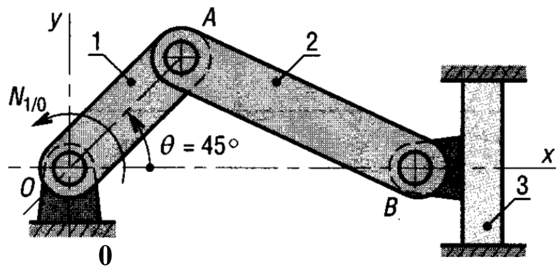
b- Déterminer les actions exercées en A et B.



EX14-

Pour le système bielle manivelle proposé, $N_{1/0}$ = 2 500 tr/min, **déterminer** la force d'inertie sur le piston si sa masse est de 0,3 kg ; valeur à 5 000 tr/min. (Avec : OA = 41 ; AB = 132)

Rep : a = -2 010 m/s^2 ; F_I = 603 N ;



EX 15- **1- Mise en situation :**

Un chariot de pont roulant est équipé d'un moteur-frein électrique qui freine à la mise hors tension. La chaîne cinématique relative à la fonction levage de la charga1 est représentée *(**fig.1**)*.

Le frein permet d'arrêter dans un intervalle de temps très court le moteur et les éléments mobiles de la chaîne cinématique relative à la fonction levage de la charge et de les maintenir immobiles.

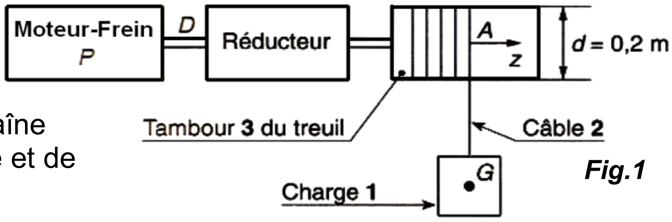


Fig.1

2- fonctionnement :

Le dispositif de freinage comporte *(**fig.2**)* :

- un électro-aimant constitué principalement par une bobine 22 et un circuit magnétique composé d'une armature fixe 5 et d'une armature mobile 6 en liaison encastrement avec le flasque 3 lui-même en liaison encastrement avec le plateau presseur 24 ;
- l'ensemble {3, 6, 24} est en liaison glissière avec trois guides 4 qui sont eux-mêmes en liaison encastrement avec le carter 2 ;
- deux disques de freinage 1 en liaison glissière avec le moyeu 7. Le moyeu 7 est en liaison encastrement avec l'arbre 23 du moteur ;
- trois ressorts 9 qui agissent sur l'ensemble mobile {3, 6, 24} et permettent de presser les disques 1 sur le carter 2 et les plateaux 8 et 24 ;
- le plateau 8 est en liaison glissière avec les trois guides 4.

• Lorsque la bobine 22 est sous tension, l'armature mobile 6 vient se plaquer sur l'armature fixe 5 et comprime les ressorts 9 dont la variation de flèche est égale à l'entrefer *e* de l'électro-aimant. Les disques 1 sont alors desserrés et libres en rotation. L'arbre moteur 23 peut tourner.

• Lorsque la bobine 22 est hors tension, les ressorts 9 permettent le serrage des disques 1 entre le carter 2 et les plateaux presseurs 8 et 24. Les disques 1 sont alors en liaison encastrement par adhérence avec le carter fixe 2. L'arbre 23 ne peut pas tourner et la charge est immobilisée.

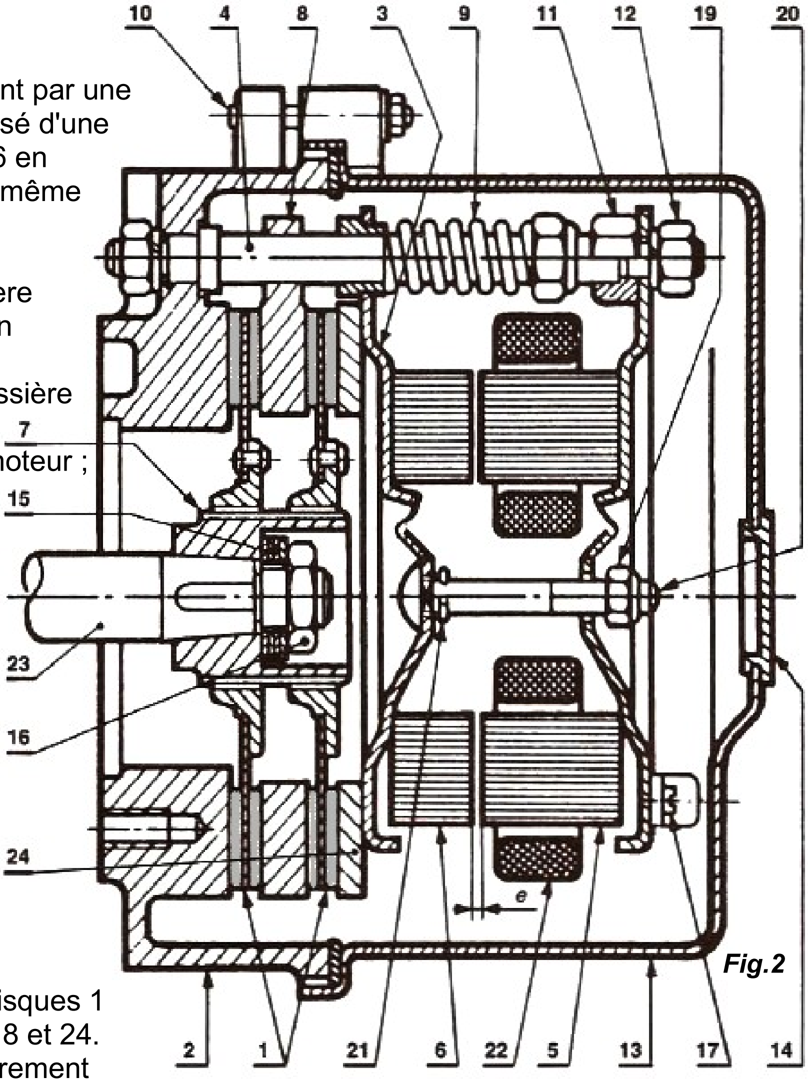


Fig.2

Nous nous proposons d'étudier le freinage de la charge dans le mouvement de descente de celle-ci.

3- Hypothèses et étude :

La descente de la charge se fait (frein desserré) à une vitesse de 0,2 m/s. Si pour une raison quelconque le moteur cesse d'être alimenté le frein doit être capable d'arrêter une charge de masse *M* = 2000 kg en 0,1s. On suppose que dans la phase de freinage le mouvement de la charge est rectiligne et uniformément décéléré. Dans une première approche on négliger l'inertie des pièces en rotation et le frottement dans les paliers du tambour 3 du treuil. On prendra g = 10 rn/s^2.

1- Dans la phase de freinage. **Étudier** le mouvement de la charge 1 *(**fig.1**)* et déterminer la valeur du vecteur accélération Γ_G de son centre de masse G ainsi que la distance de freinage.

2- On considère la charge pendant la phase de freinage. **Déterminer** les actions mécaniques extérieures qui lui sont appliquées.

3- **Déterminer** la somme algébrique des travaux des actions mécaniques extérieures appliquées à la charge pendant la phase de freinage.

4- **Déterminer** la variation d'énergie cinématique de la charge pendant la phase de freinage et en déduire le travail des actions mécaniques extérieures appliquées à la charge pendant la phase de freinage.

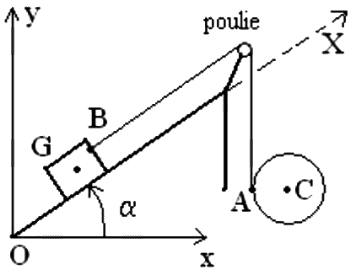
5- On considère l'ensemble S = {3,2} constitué par le tambour 3 du treuil et le câble 2 pendant la phase de freinage. **Déterminer** l'action mécanique exercée par le réducteur sur le tambour 3 du treuil ***(fig.1)***

6- Dans la phase de freinage déterminer l'angle de rotation θ_3 du tambour 3 et compte tenu du réducteur en déduire l'angle de rotation θ_1 des disques 1 du frein. Le rapport de réduction du train d'engrenage du réducteur est k = 0,1. Le diamètre du tambour 3 $d = 0,2\ m$

7- Le rendement du réducteur est η = 0,8. Dans la phase de freinage **déterminer** le moment supposé constant, exercé par le réducteur sur l'arbre 23 lié aux disques 1 et en déduire le moment du couple de freinage sur les disques 1.

8- **Déterminer** l'énergie dissipée dans le frein pendant la phase de freinage.

EX16- ENTRAÎNEMENT D'UN CUBE :



Le référentiel terrestre (R) est supposé galiléen. On considère le système constitué par un cube de masse M (solide S_1) et par un cylindre homogène de masse m, de centre C et de rayon a (solide S_2). Un fil inextensible et sans masse est attaché à une face du cube et enroulé autour du cylindre.

On note $\vec{T} = T \cdot \vec{y}$ la force exercée par le fil sur le cylindre en A.

Le cube glisse sans frottement sur le plan incliné et on considère que la poulie a une masse négligeable et tourne sans frottement autour de son axe de rotation.
Le système est abandonné sans vitesse initial, le fil n'étant ni lâché, ni tendu, le brin entre la poulie et le cylindre étant parfaitement vertical et celui entre la poulie et le cube parallèle au plan incliné.

On note $\overrightarrow{\omega_{(S_2/R)}} = \dot{\theta} \cdot \vec{x}$.

1- **Appliquer** le théorème de la résultante dynamique au cylindre.
En déduire que le mouvement de C est vertical.

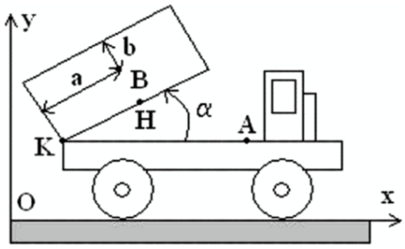
2- **Appliquer** le théorème du moment dynamique au cylindre par rapport à C.

3- Sachant que la poulie roule sans glisser sur le fil en A, **trouver** une relation entre l'intensité du vitesse V_C du centre C, l'intensité de la vitesse de translation V_2 du cube, a et θ'.

4- **Appliquer** le théorème de la résultante dynamique au cube.

5- **En déduire** les accélérations de G et C. **Discuter** suivant les valeurs de α.

EX17- DÉPLACEMENT D'UN CAMION :



Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le chauffeur d'un camion (tracteur+ benne) immobile sur une route horizontale a coupé le moteur, mais oublié de serrer ses feins. Il fait alors basculer la benne d'un angle α à un angle α_0. La masse du tracteur est notée M, celle de la benne est notée m. On note A le centre de masse du tracteur, B celui de la benne et G celui du camion. Le camion est posé sur ses 4 roues, chacune de centre C_k et de masse négligeable, tournant sans frottement autour de leur axe respectif. On note $\overrightarrow{R_k} = \overrightarrow{N_k} \cdot \vec{y} + T_k \cdot \vec{x}$ les réactions du sol sur la roue au niveau de chacun des points de contact camion/sol.

1- **Appliquer** le théorème du moment dynamique à une roue et en déduire la direction des forces de contact entre le camion et le sol.

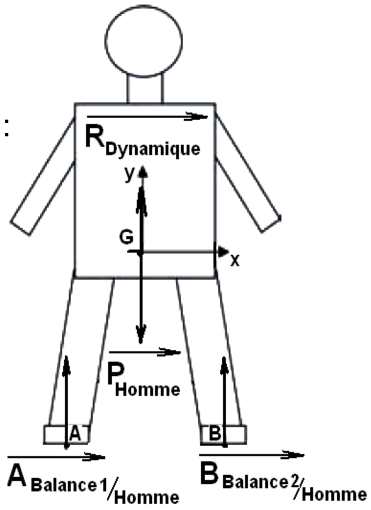
2- **Appliquer** le théorème de la résultante dynamique au camion entier. Qu'en déduisez vous pour le centre de masse G du camion.

3- **En déduire** le déplacement horizontal d du centre de masse A du tracteur.

Rep Ex1 :

Mouvement de translation rectiligne uniformément varié

1- Voir figures ci-contre.



2- On peut appliquer directement le théorème du moment dynamique :

$$\overrightarrow{A_{Balance\,1/Homme}}+\overrightarrow{B_{Balance\,2/Homme}}+\overrightarrow{P_{Homme}}=\overrightarrow{R_{Dynamique}}$$

Projection sur l'axe *(y)* :

$$\left\|\overrightarrow{A_{Balance\,1/Homme}}\right\|+\left\|\overrightarrow{B_{Balance\,2/Homme}}\right\|-m\cdot g=m\cdot a_{Homme/sol}$$

$$\left\|\overrightarrow{A_{Balance\,1/Homme}}\right\|+\left\|\overrightarrow{B_{Balance\,2/Homme}}\right\|-80\cdot 10=80\cdot 3$$

$$\left\|\overrightarrow{A_{Balance\,1/Homme}}\right\|+\left\|\overrightarrow{B_{Balance\,2/Homme}}\right\|=1040 \quad (1)$$

On peut appliquer directement le théorème du moment dynamique appliqué à l'homme isolé. Il faut écrire tous les moments résultants au même point. L'énoncé demande de les écrire au point G.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{/G}\,\overrightarrow{A_{Balance\,1/Homme}}}+\overrightarrow{\mathcal{M}_{/G}\,\overrightarrow{B_{Balance\,2/Homme}}}+\overrightarrow{\mathcal{M}_{/G}\,\overrightarrow{P_{Homme}}}=\overrightarrow{\mathcal{M}_{/G}\,\overrightarrow{m\cdot a_{Dynamique}}}$$

$$\overrightarrow{GA}\wedge\overrightarrow{A_{Balance\,1/Homme}}+\overrightarrow{GB}\wedge\overrightarrow{B_{Balance\,2/Homme}}+\overrightarrow{GG}\wedge\overrightarrow{P_{Homme}}=\overrightarrow{GG}\wedge\overrightarrow{m\cdot a_{Dynamique}}$$

$$\begin{pmatrix}-L\\-h\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\\left\|\overrightarrow{A_{Balance\,1/Homme}}\right\|\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}L\\-h\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\\left\|\overrightarrow{B_{Balance\,2/Homme}}\right\|\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\-\left\|\overrightarrow{P_{Homme}}\right\|\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\\left\|\overrightarrow{R_{Dynamique}}\right\|\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\-L\cdot\left\|\overrightarrow{A_{Balance\,1/Homme}}\right\|\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\L\cdot\left\|\overrightarrow{B_{Balance\,2/Homme}}\right\|\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Projection sur l'axe *(z)* : $-L\cdot\left\|\overrightarrow{A_{Balance\,1/Homme}}\right\|+L\cdot\left\|\overrightarrow{B_{Balance\,2/Homme}}\right\|=0$ *(2)*

3- De l'équation (2), on en déduit que : $\left\|\overrightarrow{A_{Balance\,1/Homme}}\right\|=\left\|\overrightarrow{B_{Balance\,2/Homme}}\right\|$

Et donc en remplaçant dans (1) : $2\left\|\overrightarrow{A_{Balance\,1/Homme}}\right\|=1040$

Alors : $\left\|\overrightarrow{A_{Balance\,1/Homme}}\right\|=\left\|\overrightarrow{B_{Balance\,2/Homme}}\right\|=520\,N$; Donc : $\left\|\overrightarrow{A_{Balance\,1/Homme}}\right\|=\left\|\overrightarrow{B_{Balance\,2/Homme}}\right\|=52\,kg$

4- L'énergie que la plate-forme donne à l'homme pour pouvoir le monter pendant 5 secondes en régime établi :

$$E=\mathcal{P}\cdot t=P_{Homme}\cdot V_{Homme/sol}\cdot t=80\cdot 10\cdot 6\cdot 5=24000J$$

5- Le travail que la plate-forme donne à l'homme pour pouvoir le monter sur ℓ = 30 m en régime établi : $W=P_{Homme}\cdot\ell=80\cdot 10\cdot 30=24000J$

6- Conclusion : le travail fourni par le plate-forme sur 30 m est égale à l'énergie à fournir pour déplacer l'homme en 5 secondes.

7- L'énergie cinétique emmagasinée par l'homme seul lorsque la plate-forme est en régime établi : $E_c=\dfrac{1}{2}m\cdot V^2_{Homme/sol}=0{,}5\cdot 80\cdot 6^2=1440J$

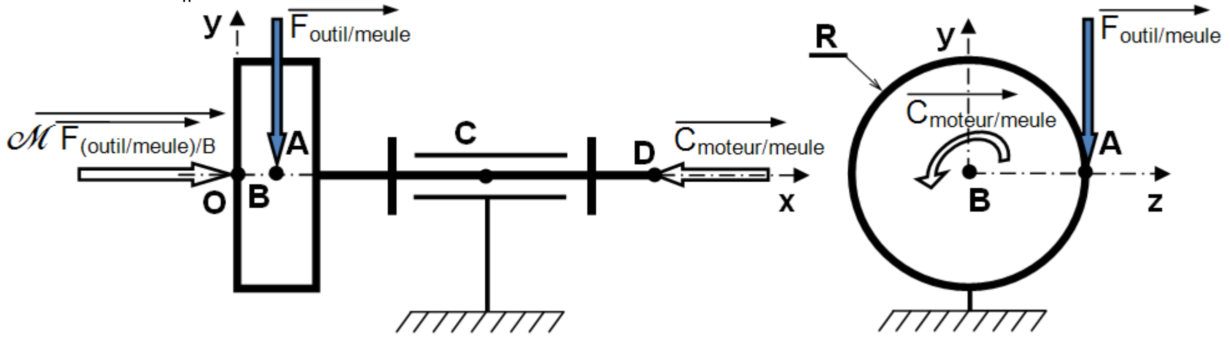
Rep Ex2 :

Mouvement de rotation uniformément varié

1- Voir figure ci-dessous.

Le moment résultant de l'action de l'outil sur la meule :

$$\left\|\overrightarrow{\mathcal{M}\, F_{(outil/meule)}}_{/B}\right\| = R\cdot\left\|\overrightarrow{F_{outil/meule}}\right\| = 0,4\cdot 50 = 20\,Nm$$ (positif autour de l'axe *(x)*) ;



2- En phase de démarrage, la meule est soumise à trois moments sur l'axe *(x)* :

- le couple du moteur sur la meule : $\overrightarrow{C_{moteur/meule}}$;
- le moment résultant de l'action de l'outil sur la meule :

$$\left\|\overrightarrow{\mathcal{M}\, F_{(outil/meule)}}_{/B}\right\| = R\cdot\left\|\overrightarrow{F_{outil/meule}}\right\| = 0,4\cdot 50 = 20\,Nm$$ (positif autour de l'axe *(x)*) ;

- le moment dynamique : $\mathcal{M}_{dynamique} = J\cdot\ddot{\theta}_{meule/bâti} = J\cdot\dot{\omega}_{meule/bâti}$ et avec :

$$J = \frac{1}{2}m\cdot R^2 = \frac{1}{2}\rho\cdot v\cdot R^2 = \frac{1}{2}\cdot 7800\cdot\pi\cdot 0,15\cdot 0,4^2\cdot 0,4^2 = 47,02\,kg\cdot m^2$$

$\mathcal{M}_{dynamique} = J\cdot\ddot{\theta}_{meule/bâti} = 47,02\cdot 13 = 611,26\,Nm$ est dirigé dans le sens du couple moteur, c'est-à-dire sur l'axe *(-x)*. Donc : $\mathcal{M}_{dynamique} = -611,26\,Nm$ sur l'axe *(x)*.

3- On applique le principe fondamental de la dynamique (théorème du moment dynamique)

$$\overrightarrow{C_{moteur/meule}} + \overrightarrow{\mathcal{M}\, F_{(outil/meule)}}_{/B} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{dynamique}}$$

en projection sur l'axe *(x)* et en un point quelconque puisque nous prenons en compte uniquement des moments : $\left\|\overrightarrow{C_{moteur/meule}}\right\| + 20 = -611,26$

4- $\left\|\overrightarrow{C_{moteur/meule}}\right\| = -631,26\,Nm$ sur l'axe *(x)*.

5- L'arbre devra résister à une torsion sous un couple de 631,26 Nm. Il devra être capable de transmettre ≈ 632 Nm à la meule pour pouvoir l'entraîner.

6- L'énergie que le moteur absorbe pendant 5 secondes en régime établi :

$$E = \mathcal{P}\cdot t = \left\|\overrightarrow{C_{moteur/meule}}\right\|\cdot\omega_{meule/bâti}\cdot t = 20\cdot 56\cdot 5 = 5600\,J$$

7- Le travail que l'homme fournit pour affûter son outil sur 100 tours de meule :

$$W = \left\|\overrightarrow{C_{moteur/meule}}\right\|\cdot\theta_{meule/bâti} = 20\cdot 2\pi\cdot 100 = 12560\,J$$

8- L'énergie cinétique emmagasinée par la meule isolée lorsqu'elle tourne à vitesse constante :

$$E_c = \frac{1}{2}J\cdot\omega^2_{meule/bâti} = 0,5\cdot 47\cdot 56^2 = 73696\,J$$

Rep Ex3 :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = 3\cdot 2300\cdot 10^3 = m\cdot a_G = 100\cdot 10^3\cdot a_G \quad \text{donc : } \quad a_G = \frac{3\cdot 2300\cdot 10^3}{100\cdot 10^3} = 69\, m/s^2 > 6{,}7\cdot g$$

L'accélération supportée est 7 fois supérieure à l'accélération de la pesanteur g.

Rep Ex4 :

Isoler *(S)* = {cabine + charge} ; *(S)* est en équilibre relatif sous :

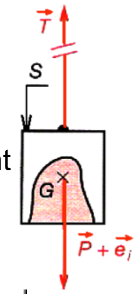
Les charges : $\vec{T} = T\cdot\vec{z}$; $\vec{P} = P\cdot\vec{z}$

L'effet d'inertie: $\vec{e_i} = -m\cdot g\cdot\vec{z}$; Les efforts dus à la pression atmosphérique, se compensent

Par conséquent : T - m.g - m .a_G = 0 D'où $T = m.(g + a_G)$

Application numérique : si $a_G = 0$: T = 5000N

si a_G = 2 m/s^2 : T = 6000 N



Rep Ex5 :

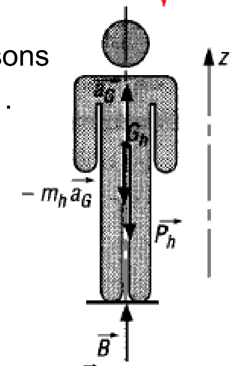
a- Isolons l'ensemble cabine + homme + balance : Afin de simplifier l'étude, supposons que le centre de gravité G de l'ensemble est situé sur la verticale commune à $\vec{T}$ et $\vec{P}$.
L'action des rails, perpendiculaires aux autres forces, n'est pas prise en compte.

Le principe de d'Alembert s'écrit $\vec{T} + \vec{P}$ - m.$\overrightarrow{a_G}$ $= \vec{0}$.

En projection sur la verticale z : - P +T - $m.a_G = 0$;

- (720 + 80) 9,81 + 9 000 - (720 + $80) a_G = 0$

d'où a_G = 1,44 m/s^2.



b- Isolons l'homme seul : L'homme est soumis à 3 actions : son poids $\overrightarrow{P_h}$,

l'action exercée par la balance $\vec{B}$ et la force d'inertie $(-m_h\cdot\overrightarrow{a_G})$. d'où : $\overrightarrow{P_h} + \vec{B} + (-m_h\cdot\overrightarrow{a_G}) = \vec{0}$

en projection sur z, on obtient : $-P_h + B - m_h\cdot a_G = 0$; $B = P_h + m_h\cdot a_G = m_h(g+a_G) = 80\cdot(9{,}81+1{,}44) = 900\,N$

Masse fictive mesurée par la balance : $m_h' = 900/9{,}81 = 91{,}74\,kg$

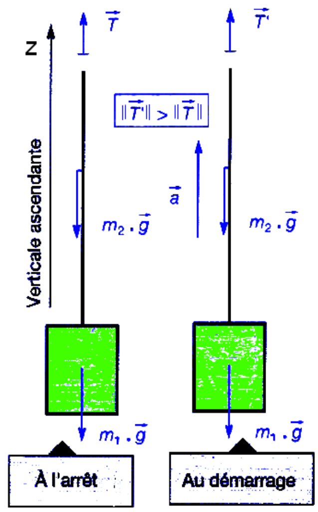
Remarque : pour le mouvement inverse (a_G = - 1,44 m/s^2),
avec freinage, la masse fictive de l'individu serait : 80 - 11,74 = 68,26 kg.

Rep EX6 :

1- La contrainte maximale dans le câble se situe à sa partie supérieure lorsqu'il est complètement déroulé.

- Masse du câble déroulé : $m_2 = \rho_v\cdot\frac{\pi d^2}{4}\cdot L = 7200\cdot\frac{3{,}14\cdot 0{,}01^2}{4}\cdot 30 = 16{,}956\ kg$
- Masse totale soutenue : $m_T = m_1 + m_2 = 1516{,}956\ kg$
- Calculer le coefficient de sécurité à l'arrêt :
  Il s'agit d'un calcul de résistance des matériaux pour un câble soumis à la traction simple :

$$\frac{F}{S} \le \frac{Re}{s} \Rightarrow s \le \frac{Re\cdot S}{F} = \frac{Re\cdot S}{(m_1+m_2)g} = \frac{1200\cdot\pi\cdot 5^2}{1516{,}956\cdot 10} = 6{,}2$$



2- Calculer l'accélération entraînant le dépassement de la limite élastique du câble :
Il faut isoler {câble déroulé + monte-charge} (voir ci-contre),

$$\sum proj_{/z}\left\|\overrightarrow{F_{ext}}\right\| = (m_1+m_2)a \quad \text{Soit : } T-(m_1+m_2) = (m_1+m_2)a$$

Alors : $T = (m_1+m_2)(a+g)$ il faut que : $\frac{T}{S} \le Re$ soit $T_{max} = S\cdot Re$

Donc : $S\cdot Re = (m_1+m_2)(a_{max}+g)$

D'où : $a_{max} = \frac{S\cdot Re}{(m_1+m_2)} - g = \frac{\pi\cdot 5^2\cdot 1200}{1516{,}956} - 10 = 52{,}098\ m/s^2$

Rep Ex7-

1- Isoler et choisir un repère : On isole le cylindre et l'on choisit $\mathcal{R}_g$ lié au sol.

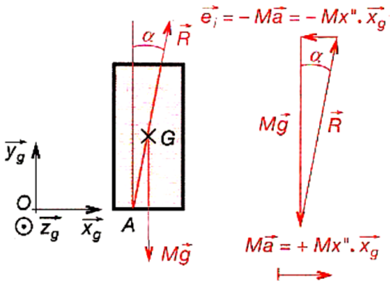
Modéliser les actions mécaniques :

○ Poids représenté par $(G, M\vec{g})$.

○ Appui-plan représenté par R, dans le plan $(O, \vec{x_g}, \vec{y_g})$ de symétrie inclinée de α de façon à s'opposer au mouvement éventuel. à la limite de glissement α = φ (angle de frottement tel que f = tg φ)

Principe fondamental	Méthode de d'Alembert
$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = M\vec{a}$	$\sum \overrightarrow{F_{ext}} + \vec{e_i} = \vec{0}$
En projection sur $\vec{x_g}$ et $\vec{y_g}$	
$R\sin\alpha = M\ddot{x}$ (1)	$R\sin\alpha - M\ddot{x} = 0$ (1)
$R\cos\alpha - Mg = 0$ (2)	$R\cos\alpha - Mg = 0$ (2)

Condition de non glissement

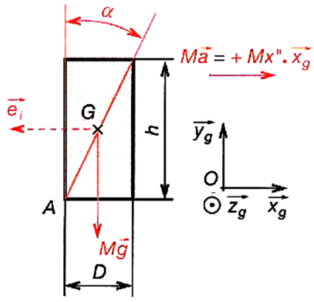


2- On déduit de (1) et (2) que $tg\alpha = \dfrac{\ddot{x}}{g}$

- d'où la condition de non glissement : $\dfrac{\ddot{x}}{g} \le tg\varphi$ soit $\ddot{x} \le f\cdot g = 5\,m/s^2$
- d'où la condition de non basculement (autour de A) si :

$\dfrac{\ddot{x}}{g} \le \dfrac{D}{h}$ soit $\ddot{x} \le g\cdot\dfrac{D}{h} = 3{,}57\,m/s^2$

Condition de non basculement



Rep Ex8-

A/ 1- • Système étudié : le corps S_1

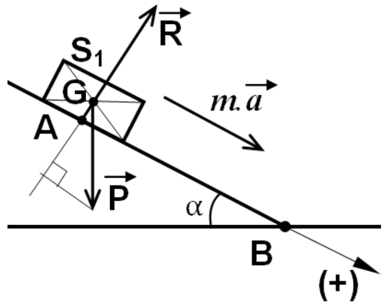
• Bilan des efforts : $\vec{R}$; $\vec{P}$

• Théorème utilisé : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\cdot\vec{a}$

Application du théorème : $\vec{R} + \vec{P} = m\cdot\vec{a}$

En projetant sur le plan incliné il vient : $m\cdot g\cdot\sin\alpha + 0 = m\cdot a$

Donc : $\boxed{a = g\cdot\sin\alpha = 10\cdot\sin 30° = 5\,m/s^2}$



2- Origine des espaces : A

Origine des temps : départ de S_1 ($V_0 = 0$ à t = 0)

L'équation du mouvement est : $x = \dfrac{1}{2}a\cdot t^2 + V_0\cdot t + x_0$; $\boxed{x = \dfrac{1}{2}a\cdot t^2}$; $\boxed{V = 5\cdot t}$; $\boxed{V^2 = 10\cdot x}$

3- La distance AB est donnée par la troisième équation : $\boxed{x = \dfrac{V^2}{10} = \dfrac{3^2}{10} = 0{,}9\,m}$

4- Le temps mis par S_1 pour parcourir AB est : $\boxed{t = \dfrac{V}{5} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6\,s}$

B/ 1- La relation fondamentale de la dynamique appliquée à S2 sur lequel ne s'exerce qu'une seule force, son poids, permet d'écrire : $\vec{P} = m\cdot\vec{a}$ la projection de cette relation donne :

• **Sur Ox :** $0 = m\cdot a_x$ donc $a_x = 0$; le mouvement est rectiligne est uniforme d'équation :

$x = V_{0x}\cdot t + x_0$ or $V_{0x} = V_c = 2{,}24\,m/s$ et $x_0 = 0$; alors : $\boxed{x = 2{,}24\cdot t}$

• **Sur Oy :** $m\cdot g = m\cdot a_y$ donc $a_y = g$; le mouvement est uniformément accéléré d'équation :

$y = \dfrac{1}{2}a_y\cdot t^2 + V_{0y}\cdot t + y_0$ or $V_{0y} = 0$ et $y_0 = 0$; alors : $\boxed{y = 5\cdot t^2}$

2- Le temps de chute : $y = h = 20\,m$; $\boxed{t = \sqrt{\dfrac{y}{5}} = \sqrt{\dfrac{20}{5}} = 2\,s}$

3- Distance OD : $t = 2s$ donc $\boxed{x = 2{,}24\cdot t = 2{,}24\cdot 2 = 4{,}48\,m}$

Rep Ex9:

a- Bilan des actions mécaniques extérieures :

- En A il y a roulement type BC ce qui donne une liaison rotule, d'où le torseur statique en A est de la forme suivant :

$$\{\tau_{1/S}\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

- En B il y a roulement type RU ce qui donne une liaison linéaire annulaire, d'où le torseur statique en B est de la forme suivant :

$$\{\tau_{2/S}\}_B = {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

- L'action de pesanteur est modélisable en G par :

$$\{\tau_{T/S}\}_G = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -200 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

b- L'expression de ces torseurs en A : (c.à.d, appliquer la **relation de transport** en A)

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}(2/S)}_{/A} = \vec{0} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F_{2/S}} = \begin{pmatrix} 0,32 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,32\cdot Z_B \\ 0,32\cdot Y_B \end{pmatrix} \text{; donc } \{\tau_{2/S}\}_{B\to A} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & -0,32\cdot Z_B \\ Z_B & 0,32\cdot Y_B \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}(T/S)}_{/A} = \vec{0} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{F_{T/S}} = \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -200 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -30 \end{pmatrix} \text{; donc } \{\tau_{T/S}\}_{G\to A} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -200 & 0 \\ 0 & -30 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}(3/S)}_{/A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{F_{3/S}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} \text{; donc } \{\tau_{3/S}\}_{C\to A} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 100 & 0 \\ 0 & 40 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

c- Appliquer PFD à S : $\{\tau_{1/S}\}_A + \{\tau_{2/S}\}_{B\to A} + \{\tau_{T/S}\}_{G\to A} + \{\tau_{3/S}\}_{C\to A} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ J_x\cdot\overrightarrow{\theta''} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

$${}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & -0,32\cdot Z_B \\ Z_B & 0,32\cdot Y_B \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -200 & 0 \\ 0 & -30 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 100 & 0 \\ 0 & 40 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & J_x\cdot\theta'' \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$X_A = 0; Y_A = 131,25; Z_A = 0$ et $X_B = 0; Y_B = -31,25\,N; Z_B = 0$

d- L'accélération angulaire θ'' du mouvement de S et la nature de ce mouvement :

$\theta'' = \dfrac{2}{J_x} = \dfrac{2}{8.10^{-3}} = 250\ rad/s^2$; Mouvement de rotation uniformément accéléré.

e- Le temps nécessaire pour atteindre 1500 tr/mn : $\dot{\theta} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_i$ Alors : $t = \dfrac{2\pi N}{60\cdot\ddot{\theta}} = \dfrac{2\pi\cdot 1500}{60\cdot 250} = 0,628\ s$

Rep Ex10 :

Isoler l'ensemble tournant (figure ci-dessous) et écrire le principe fondamental en projection sur l'axe de rotation : $C_m - C_r = J_{G\vec{z}}.\omega' \Rightarrow \omega' = \dfrac{C_m - C_r}{J_{G\vec{z}}}$

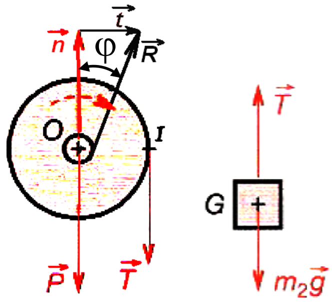
1- Frottement négligé : $\omega' = \dfrac{C_m - C_r}{0,5\cdot m\cdot R^2} = \dfrac{5-0}{0,5\cdot 50\cdot 0,15^2} = 8,88\ rad/s$

et $\omega = t\omega'$ alors : $t = \dfrac{\omega}{\omega'} = \dfrac{2\pi\cdot 1500}{60\cdot 8,88} = 17,68\ s$

2- Cas du frottement : $\omega' = \dfrac{C_m - C_r}{0,5\cdot m\cdot R^2} = \dfrac{5-0,2}{0,5\cdot 50\cdot 0,15^2} = 8,53\ rad/s$ et $\omega = t\omega'$

alors : $t = \dfrac{\omega}{\omega'} = \dfrac{2\pi\cdot 1500}{60\cdot 8,53} = 18,40\ s$

Rep Ex11 :



◆ Isolement du tambour : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$

Proj/oy : $m_1 \cdot g - n + T = 0$

$$\sum M_{Gz}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = T \cdot R - n \cdot f \cdot r = J_{Gz} \cdot \omega'$$

◆ Isolement de la charge : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{T} + m_2 \cdot \vec{g} = m_2 \cdot \vec{a}$

$$-T + m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$$

◆ Aspect cinématique : L'accélération de la charge est égale à l'accélération tangentielle du tambour

$$a = a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\omega \cdot R)}{dt} = \omega' \cdot R$$

◆ Il faut donc résoudre : $m_1 \cdot g - n + T = 0 \quad \Rightarrow \quad n = T + m_1 \cdot g$

$$m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot R \cdot \omega' \quad \Rightarrow \quad T = m_2 \cdot (g - \omega' \cdot R)$$

$$T \cdot R - n \cdot f \cdot r = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot R^2 \cdot \omega' \ \Rightarrow \ m_2 \cdot (g - \omega' \cdot R) \cdot R - [m_2 \cdot (g - \omega' \cdot R) + m_1 \cdot g] \cdot f \cdot r = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot R^2 \cdot \omega'$$

Donc : $\omega' = \dfrac{g\left[m_2 \cdot R - (m_1 + m_2) \cdot f \cdot r\right]}{R\left[0{,}5 \cdot m_1 \cdot R + m_2 (R - f \cdot r)\right]}$

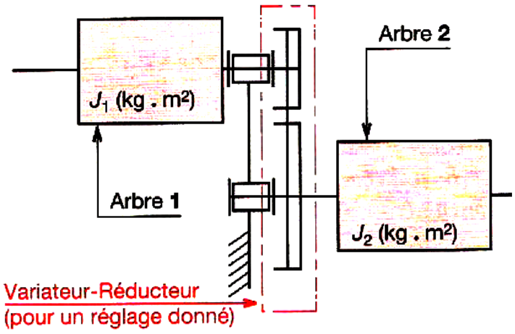
Alors : $a = \dfrac{g\left[m_2 \cdot R - (m_1 + m_2) \cdot f \cdot r\right]}{0{,}5 \cdot m_1 \cdot R + m_2 (R - f \cdot r)} = \dfrac{10\left[30 \cdot 0{,}2 - (60 + 30) \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}01\right]}{0{,}5 \cdot 60 \cdot 0{,}2 + 30(0{,}2 - 0{,}2 \cdot 0{,}01)} = 4{,}85 \ m/s^2$

Mouvement de rectiligne uniformément accéléré : $V = a \cdot t$ et $h = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ d'où $t = \sqrt{\dfrac{2 \cdot h}{a}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 10}{4{,}85}} = 2{,}03$

Rep Ex12 :

1- Isolons l'arbre 1 : $C_{m1} - F \cdot r_1 = J_1 \theta_1''$

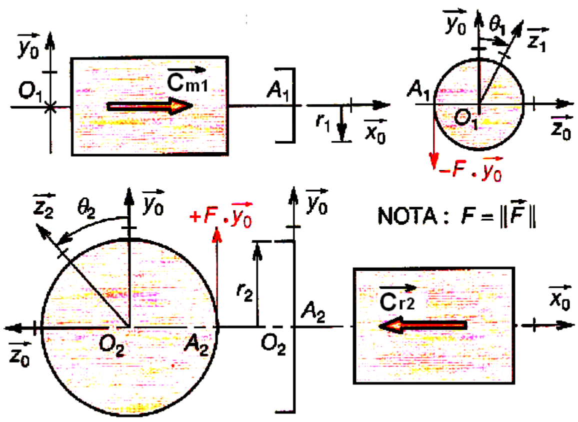
Isolons l'arbre 2 : $F \cdot r_2 - C_{r2} = J_2 \cdot \theta_2'' \ \Rightarrow F = \dfrac{J_2 \cdot \theta_2'' + C_{r2}}{r_2}$



Relation cinématique : $\dfrac{\theta_2''}{\theta_1''} = \dfrac{r_1}{r_2} \Rightarrow \theta_2'' = \theta_1'' \cdot \dfrac{r_1}{r_2}$

Alors : $\left[J_1 + J_2 \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2\right] \cdot \theta_1'' = C_{m1} - C_{r2} \cdot \dfrac{r_1}{r_2}$

Donc : $\theta_1'' = \dfrac{C_{m1} - C_{r2} \cdot \dfrac{r_1}{r_2}}{J_1 + J_2 \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2} = \dfrac{12 - 20 \dfrac{15}{60}}{0{,}2 + 3\left(\dfrac{15}{60}\right)^2} = 18{,}06 \ rad/s$



2- Duré du démarrage (aspect cinétique) :

$$\theta_1' = \theta_1'' \cdot t \ \Rightarrow \ t = \frac{\theta_1'}{\theta_1''} = \frac{2\pi \cdot 1500}{60 \cdot 18{,}06} = 8{,}69 \ s$$

3- Duré de l'arrêt :

$$\theta_1'' = \frac{-C_{r2} \cdot \dfrac{r_1}{r_2}}{J_1 + J_2 \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2} = \frac{-20 \dfrac{15}{60}}{0{,}2 + 3\left(\dfrac{15}{60}\right)^2} = -12{,}903 \ rad/s$$

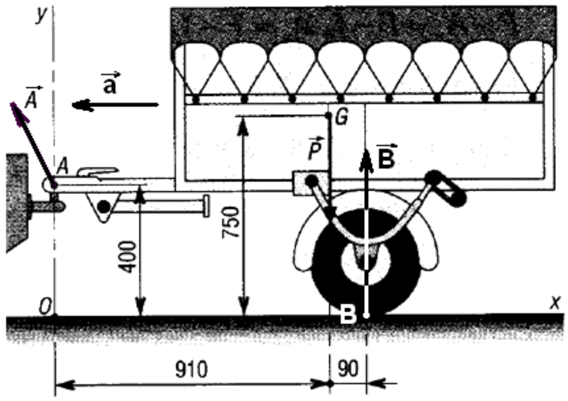
$$t = \frac{\theta_1'}{\theta_1''} = \frac{2\pi \cdot 1500}{60 \cdot 12{,}903} = 12{,}16 \ s$$

Rep Ex13 :

a- L'accélération du mouvement si celle-ci est constante :

$V^2 = V_0^2 + 2a(x - x_0)$ avec : $V_0 = x_0 = 0; V = 20\,m/s\,; x = 100\,m$; donc : $a = \dfrac{V^2}{2x} = \dfrac{20^2}{2 \cdot 100} = 2\,m/s^2$

b- Les actions exercées en A et B :



$\Large\Leftarrow$ $\sum \vec{F_{ext}} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}$

En projection sur l'axe *(x)* : $A_x + 0 + 0 = m \cdot a$

Donc : $A_x = \dfrac{3000}{10} \cdot 2 = 600\,N$

En projection sur l'axe *(y)* : $A_y + B_y - P = 0$

$A_y + B_y = 3000\,N$

$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O} F_{ext}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O} A} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O} B} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O} P} = \vec{0}$

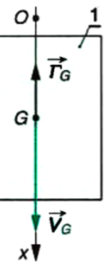
$= \overrightarrow{OA} \wedge \vec{A} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{B} + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} = \vec{0}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0,4 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 600 \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,91 \\ 0,75 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -3000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,4 \cdot A_z \\ 0 \\ -0,4 \cdot 600 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,91 \cdot 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc : $B_y = 2970\,N$ et $A_y = 30\,N$, $A_z = 0$

Rep Ex 15



1- Le mouvement de la charge étant rectiligne et uniformément décéléré on peut, sur la figure ci-contre, représenter les vecteurs *vitesse* $\vec{V_G}$ et *accélération* $\vec{\Gamma_G}$ du point G.

On choisit *(O,* $\vec{x}$ *)* orienté dans le sens du mouvement. L'origine *O* correspond à la position du point G au début du freinage. On note : $\overrightarrow{OG} = x.\vec{x}$.

On choisit l'origine des temps *t* = 0 au début du freinage.

Les équations du mouvement du point G s'écrivent : $x = \frac{1}{2}\gamma_t \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$ (1) ; $v = \gamma_t \cdot t + v_0$ (2)

Au début du freinage à t = 0 : $x = 0$ donc $v = 0,2\,m/s$

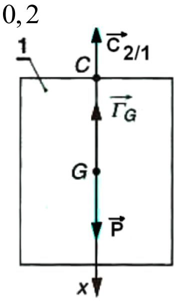
La relation (1) permet de déterminer : $x_0 = 0$ et La relation (2) permet de déterminer : $v_0 = 0,2$

à la fin du freinage à t = 0,1 : $v = 0$

La relation (2) permet de déterminer alors : $\gamma_t = -2\,m/s^2$ d'où : $\vec{\Gamma_G} = -2\vec{x}$;

la relation (1) s'écrit alors : $x = -t^2 + 0,2.t$

La distance de freinage correspond à la valeur de x pour t = 0,1 soit x = 0,01m



2- Les actions mécaniques extérieurs appliquées à la charge 1 sont :

- l'action de la pesanteur : $\vec{P} = M \cdot \vec{g}$ d'où $P = 2 \cdot 10^4 \vec{x}$

- l'action du câble 2 sur 1. Cette action est modélisable en C par un glisseur : $\overrightarrow{C_{2/1}} = -\left\|\overrightarrow{C_{2/1}}\right\| \vec{x}$

l'application du principe fondamental de la dynamique au point G permet d'écrire : $\vec{P} + \overrightarrow{C_{2/1}} = M \cdot \vec{\Gamma_G}$

En projetion sur *(G,* $\vec{x}$ *)* on obtient : $2 \cdot 10^4 - \left\|\overrightarrow{C_{2/1}}\right\| = 2000 \cdot (-2)$ $\left\|\overrightarrow{C_{2/1}}\right\| = 24000\,N$ d'où $\overrightarrow{C_{2/1}} = -24000 \cdot \vec{x}$

3- Pour un déplacement élémentaire, le travail élémentaire des actions mécaniques extérieures appliquées à la charge s'écrit : $dW = \overrightarrow{C_{2/1}} \cdot \overrightarrow{dx} + \vec{P} \cdot \overrightarrow{dx} = -\left\|\overrightarrow{C_{2/1}}\right\| \cdot dx + \left\|\vec{P}\right\| \cdot dx$

AN : $dW = (-24000 + 20000) \cdot dx = -4000 \cdot dx$

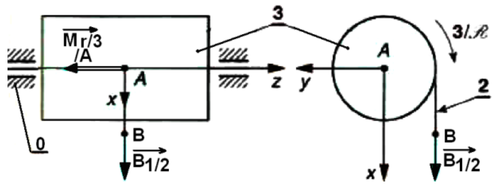
pour un déplacement x = 0,01 m ; on obtient : $W = -4000 \cdot 0{,}01 = -40\,J$

4- La charge et animée d'un mouvement de translation, On peut donc écrire que :

$E_{c2} - E_{c1} = \frac{1}{2} M (V_2^2 - V_1^2) = \frac{2000(0 - 0{,}2^2)}{2} = -40\,J$.

En appliquant le théorème sur la variation d'énergie cinétique d'un solide on obtient : $W_{12} = E_{c2} - E_{c1} = -40\,J$

5- Les actions mécaniques extérieures appliquées à S sont :



- l'action de 1 sur 2 modélisable en B par le torseur glisseur :

$$\{\tau_{1/2}\}_B = {}_B\begin{Bmatrix} \overrightarrow{B_{1/2}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{\Re} = {}_B\begin{Bmatrix} 24\cdot10^3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

- l'action de liaison pivot sans frottement entre le bâti 0 et le tambour 3.

Cette action est modélisable en A par le torseur : $\{\tau_{0/3}\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{0/3}} \\ \overrightarrow{M_{0/3/A}} \end{Bmatrix}_{\Re} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{0/3} & L_{0/3} \\ Y_{0/3} & M_{0/3} \\ Z_{0/3} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

- l'action du réducteur sur 3 modélisable en A le torseur couple : $\{\tau_{r/3}\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{r/3/A}} \end{Bmatrix}_{\Re} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{r/3} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

L'inertie de *S* étant négligée. le principe fondamental de la dynamique appliqué en A permet d'écrire que :

$\overrightarrow{M_{\bar{s}/s/A}} = \overrightarrow{M_{1/2/A}} + \overrightarrow{M_{0/3/A}} + \overrightarrow{M_{r/3/A}} = \vec{0}$ avec $\overrightarrow{M_{1/2/A}} = \overrightarrow{M_{1/2/B}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{B_{1/2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 24\cdot10^3 \cdot r \end{pmatrix}$

proj/z : $24\cdot10^3 \cdot r + 0 + N_{r/3} = 0$; alors : $N_{r/3} = -24\cdot10^3 \cdot 0{,}1 = -2400\,Nm$; donc : $\{\tau_{r/3}\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2400 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

6- Si *x* es t le déplacement vertical de la charge lors du freinage et θ_3 l'angle de rotation du tambour 3 du treuil, on peut écrire que : $x = \theta_3 \cdot \frac{d}{2}$ d'où : $\theta_3 = \frac{2x}{d} = \frac{2\cdot0{,}01}{0{,}2} = 0{,}1\,rad$

Si θ_1 est l'angle de rotation des disques 1 pendant le freinage et si *k* est le rapport de réduction du réducteur, on peut écrire que : $\theta_3 = k\theta_1$ d'où : $\theta_1 = \frac{\theta_3}{k} = \frac{0{,}1}{0{,}1} = 1\,rad$

7- Le rendement du réducteur a pour expression : $\eta = \frac{\text{énergie fournie à l'arbre 23}}{\text{énergie reçue du tamboure 3}}$ (1)

L'énergie fournie à l'arbre 23 a pour expression $W_{23} = M_{23} \cdot \theta_{23}$

L'énergie reçue du tambour 3 a pour expression $W_3 = N_{3/r} \cdot \theta_3$

La relation (1) s'écrit alors : $\eta = \frac{M_{23} \cdot \theta_{23}}{N_{3/r} \cdot \theta_3}$ d'où $M_{23} = \frac{\eta \cdot N_{3/r} \cdot \theta_3}{\theta_{23}}$ (2)

L'arbre 23 et les disques 1 sont liés en rotation, donc : $\theta_{23} = \theta_1 = 1\,rad$ (question 6)

La relation (2) permet d'écrire $M_{23} = \frac{0{,}8 \cdot 2400 \cdot 0{,}1}{1} = 192\,N.m$

Le PFD appliqué à l'ensemble en rotation S lié à l'arbre 23 et aux disques 1 au point D par rapport à l'axe z, permet d'écrire $\overline{M_{\bar{s}/s/D}} = I_{(D,\vec{z})} \cdot \theta_1''$; Par hypothèse on néglige l'inertie des masses tournantes,

d'où : $\overline{M_{\bar{s}/s/D}} = 0$. Soit M_f le moment de freinage appliqué sur les disques 1. On néglige le frottement dans les paliers de guidage de l'ensemble S, il s'ensuit que : $\overline{M_{\bar{s}/s/D}} = M_{23} + M_f = 0$;D'où $M_f = -M_{23} = -192\,N\cdot m$

8- En admettant que M_f est constant pendant le freinage l'énergie dissipée dans le frein a pour expression :

$W_f = M_f \cdot \theta_1 = -192 \cdot 1 = -192\,J$

Rep : Ex16

1- $m\dfrac{d\overrightarrow{V_C}}{dt} = m\cdot\vec{g} + \vec{T} = (T - m\cdot g)\vec{y}$ et le mouvement de C est vertical

(C est initialement immobile et cette portion de fil verticale) $m\dfrac{dV_C}{dt} = T - m\cdot g$ (1)

2- Pour le cylindre, C est son centre de masse : $\overrightarrow{\delta_{cyl,C}} = \dfrac{1}{2}m\cdot a^2\cdot\ddot{\theta}\cdot\vec{x} = \overrightarrow{CC}\wedge m\cdot\vec{g} + \overrightarrow{CA}\wedge T\cdot\vec{y} = -a\cdot T\cdot\vec{x}$

$\dfrac{1}{2}m\cdot a\cdot\ddot{\theta} = -T$ (2)

3- Il y a roulement sans glissement en A : $\overrightarrow{V_{A,fil}} = V_A\cdot\vec{y} = \overrightarrow{V_{A,Cyl}} = \overrightarrow{V_C} + \overrightarrow{AC}\wedge\dot{\theta}\cdot\vec{x} = (V_C - a\cdot\dot{\theta})\vec{y}$

$V_A = V_C - a\cdot\dot{\theta}$ (3) Le fil est inextensible, le cube en translation : si $\overrightarrow{V_G} = \overrightarrow{V_B} = V_f\cdot\vec{x}$

alors $V_f = -V_A$ soit $V_A = -V_f = V_C - a\cdot\dot{\theta}$

4- Le fil est sans masse, la tension dans le fil est uniforme. Soit $M\dfrac{dV_f}{dt} = T - Mg\sin\alpha$ (4)

5- $M\dfrac{dV_f}{dt} = T - Mg\sin\alpha = -M\dfrac{dV_C}{dt} + Ma\ddot{\theta} = -\dfrac{M}{m}(3T - mg)$

$T = \dfrac{Mm}{3M+m}g(1+\sin\alpha)$ soit $\dfrac{dV_f}{dt} = \dfrac{m - 3M\sin\alpha}{3M+m}g$ et $\dfrac{dV_C}{dt} = \dfrac{M\sin\alpha - 2M - m}{3M+m}g$

L'accélération de C est toujours négative : le mouvement du cylindre est toujours descendant.
Si m > 3M.sinα, le cube remonte, il descend si m < 3M.sinα et immobile si m = 3M.sinα.

Rep Ex17

1- $\overrightarrow{\delta_{Ck}} = \vec{0} = \overrightarrow{C_kC_k}\wedge\overrightarrow{A_{Ck}} + \overrightarrow{C_kI_k}\wedge\overrightarrow{R_k} = RT_k\vec{z}$ donc $T_k = 0$

2- $M\dfrac{d\overrightarrow{V_A}}{dt} + m\dfrac{d\overrightarrow{V_B}}{dt} = (M = m)\dfrac{d\overrightarrow{V_G}}{dt} = \left[-(M+m) + \sum_{k=1}^{4}N_k\right]\vec{y}$ alors $\dfrac{dV_{Gx}}{dt}$

Le camion étant initialement immobile, le basculement de la benne ne provoque pas de mouvement du centre de masse G du camion suivant la direction horizontale.

3- $M\dfrac{d\overrightarrow{V_{Ax}}}{dt} + m\dfrac{d\overrightarrow{V_{Bx}}}{dt} = 0$ d'où $MV_{Ax} + mV_{Bx} = Cte = 0$ alors $Md + md_{Bx} = Cte = 0$

$d_{Bx} = \alpha(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)$ donc : $d = -\dfrac{m}{M}\alpha(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)$

Remarque :

Si, au cours de l'étude, un élève repère ce qui lui semble être une erreur ou fautes de frappe, il le signale au professeur de la matière !!!

EZZ@HR@OUI @bderr@him 1 STE - 2 STE TCT - SM-B 1 STM - 2 STM
Lycée Jaber ben HAYAN